الإثبات : الحالة الأولى

1- إذا كانت الدالة f غير سالبة ومقيسة فإننا نجد متتالية متزايدة من الدوال البسيطة وغير السالبة (حسب المبرهنة السابقة) تتقارب من الدالة f في كل نقطة $x \in E$

2- الحالة الثانية

إذا كانت الدالة f دالة مقيسة كيفية ليس بالضرورة أن تكون غير سالبة $f : E \to \bar{R}$ دالة قابلة للقياس كيفية و $\lambda(E) < \infty$

نعرف الدالتين المساعدتين التاليتين :

$$f^{+} : E \to \bar{R}_{+}$$

والمعرفة بالشكل :

$$f^{+}(x) = \begin{cases} f(x) & ; f(x) \geq 0 \\ 0 & ; f(x) < 0 \end{cases}$$

أو :

$$f^{+}(x) = \max\{f(x), 0\}$$

انها دالة مقيسة وغير سالبة (الجزء الموجب لـ f)

ولتكن أيضا الدالة $f^{-} : E \to \bar{R}_{+}$ والمعرفة بالشكل :

$$f^{-}(x) = \begin{cases} 0 & ; f(x) \geq 0 \\ -f(x) & ; f(x) < 0 \end{cases}$$

أو :

$$f^{-}(x) = \max\{-f(x), 0\} = f^{-}(x) \quad \forall x \in E$$

انها دالة مقيسة وغير سالبة على E (الجزء السالب لـ f)

ومن جهة أخرى نلاحظ أن :

$$f^{+}(x) = \frac{1}{2}\left[f(x) + |f(x)|\right] \Rightarrow f^{+}(x) = \frac{f(x) + |f(x)|}{2}$$

$$f^{-}(x) = \frac{1}{2}\left[|f(x)| - f(x)\right] \qquad f^{-}(x) = \frac{|f(x)| - f(x)}{2}$$

نلاحظ أن:

$|f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$; $\forall x \in E$

وكذلك لدينا:

$f(x) = f^+(x) - f^-(x)$

وبالتالي حسب المبرهنة السابقة يمكن إيجاد متتاليتين $\{f_n^+(x)\}$ و $\{f_n^-(x)\}$ من الدوال البسيطة غير السالبة تتقارب من الدالتين $f^+(x)$ و $f^-(x)$ على الترتيب ومنه نحصل على المتتالية $\{f_n^+(x) - f_n^-(x)\}$ التي تتقارب من الدالة $f(x)$ في كل نقطة $x \in E$

تمرين:

لتكن الدالة f معطاة بالشكل:

$f(x) = x - [x]$; $x \in [a,b]$

$(a,b \in R ,\ a<b)$

هل هذه الدالة قياسية؟

الحل:

نعرف أن $f_1(x) = x$ مستمرة على $[a,b]$ وكل دالة مستمرة على مجال مغلق قياسية (تكاملية)

$\lambda([a,b]) = b - a < \infty \Rightarrow$

فهي قياسية على المجال $[a,b]$

ونعرف أن $f_2(x) = [x]$ قياسية (حسب تمرين سابق)

ولدينا المجموعة $E = [a,b]$ قياسية حسب ليبيغ

$$\forall c \in R : E(f_2 > c) = \begin{cases} \phi & ; c \geq f_2(b) \\ [n+1, b] & ; n < c \leq n+1 \leq f_2(b) \end{cases}$$

$\Leftarrow$ ϕ قياسية حسب ليبيغ و $[n+1, b]$ مجال مغلق أي مجموعة مغلقة قياسية حسب ليبيغ $\Leftarrow$ $E(f_2 > c)$ قياسية حسب ليبيغ $\forall c \in R$

$\Rightarrow f(x) = f_1(x) - f_2(x)$

قياسية حسب ليبيغ

تكاملات لبيغ

تكامل لبيغ لدالة مقيسة محدودة:

في هذا الفصل نعرف تعميم تكامل ريمان بشكل مختلف عن تكامل ستيلتجس

ملاحظة:

رأينا أن الشرط اللازم لوجود تكامل ريمان هو أن تكون الدالة محدودة "الشرط لازم وغير كافي"

في هذا الفصل نعرف [illegible] للدالة المحدودة حسب ريمان ومقترح بطريقة لبيغ تختلف عن الطريقة، أن لبيغ قام بتجزئة مجال $[m, M]$

$$\forall x \in E \quad , \quad m \leq f(x) \leq M$$

لذلك نعرف تقسيم الدالة $f(x)$ النقاط y_k $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$ المتوالية أي التجزئة P مثلا:

$$P = \{m = y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n = M\}$$

ثم نشكل المجموعات التالية:

$$e_k = E(y_{k-1} \leq f < y_k) \quad , k = 1, 2, \ldots, n$$

ملاحظة: أن طريقة ريمان للتكامل كانت تعتمد على تقريب النقاط x من بعضها البعض في حين أن طريقة لبيغ تعتمد على تقريب قيم الدالة $f(x)$ من بعضها البعض [illegible] يمكن أن نأخذ القيمة y_{k-1} ممثلة لقيم الدالة $f(x)$ على e_k وبالتالي نكون المجموع التالي:

$$\sum_{k=1}^{n} y_{k-1} \, m(e_k)$$

كأساس في تعريف تكامل لبيغ

ملاحظة:

من خلال تعريف المجموعات e_k نجد أن نقاط x التي $x \in e_k$ تعطي قيماً للدالة $f(x)$ قريبة من بعضها مع إمكانية أن تكون النقاط x نفسها ليست قريبة من بعضها البعض

تعريف تكامل ليبيغ:

لتكن $f(x)$ دالة حقيقية محدودة على المجموعة القيوسة E ، $\lambda(E) < \infty$ و E ذات قياس منته، ولتحقق: $m < f(x) < M \; ; \; \forall x \in E$

ولتكن P التجزئة:

$$P = \{m = y_0, y_1, \ldots, y_n = M\}$$

ولنشكل المجال الجزئي e_k ، $k = 1, 2, \ldots, n$ حيث

$$e_k = E(y_{k-1} \le f < y_k)$$

كما أن: $E = \bigcup_{k=1}^{n} e_k$

حيث أن المجموعات e_k قيوسة، منفصلة مثنى مثنى أي

$$e_i \cap e_j = \phi \; ; \; i \ne j \; ; \; (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

ومنه المجموعات تشكل تجزئة للمجموعة E، ولنشكل الآن المجموعين التاليين

$$\underline{S} = s(f, P) = \sum_{k=1}^{n} y_{k-1} \lambda(e_k) \quad \ldots \; 1$$

الذي يسمى مجموع ليبيغ الأدنى (السفلي) للدالة f والموافق للتجزئة P للمجال $[m, M]$

$$\overline{S} = S(f, P) = \sum_{k=1}^{n} y_k \lambda(e_k) \quad \ldots \; 2$$

والذي يسمى مجموع ليبيغ الأعلى للدالة f الموافق للتجزئة P للمجال $[m, M]$

والآن إذا وضعنا $\delta = \max(y_k - y_{k-1})$ فيمكننا إثبات أن:

$$0 \le \overline{S} - \underline{S} \le \delta \cdot \lambda(E)$$

الإثبات:

$y_{k-1} \le y_k \Rightarrow y_{k-1}\lambda(e_k) \le y_k\lambda(e_k) \Rightarrow$

$\sum_{k=1}^{n} y_{k-1}\lambda(e_k) \le \sum_{k=1}^{n} \lambda(e_k) \Rightarrow \underline{S} \le \overline{S} \Rightarrow$

$0 \le \overline{S} - \underline{S} = \sum_{k=1}^{n} (y_k - y_{k-1})\lambda(e_k) \le \delta \sum_{i=1}^{n} \lambda(e_k) = \delta\lambda(E)$

نتيجة:
إذا أضفنا نقاط جديدة للتجزئة P فلا ينقص من المجموع الأدنى ولا يزيد المجموع الأعلى

نتيجة:
كل مجموع لبيغ الأدنى أصغر من أي مجموع لبيغ الأعلى

تعريف:
التكامل الأدنى:

$I_l = \sup_{P\in P[m,M]} s(f,P) = \sup_{P\in P[m,M]} \underline{S}$

وهو تكامل لبيغ الأدنى للدالة f على المجموعة E

$I_u = \inf_{P\in P[m,M]} S(f,P) = \inf \overline{S}$

وهو تكامل لبيغ الأعلى للدالة f على المجموعة E

نتيجة:

$$\underline{S} \le I_l \le I_u \le \overline{S}$$

تعريف:
لتكن f دالة محدودة ومعرفة على E حيث E مجموعة جزئية من R قابلة للقياس E، $\lambda(E)<\infty$ فإذا كان: $I_u = I_l$ فإننا نقول أن الدالة f تكون قابلة للتكامل حسب لبيغ على المجموعة E ونسمي القيمة المشتركة لها بتكامل لبيغ للدالة f على المجموعة E ونرمز لها بالرمز:

$$I = (L)\int_E f(x)\,d\lambda$$

تكامل لبيغ

انتهت المحاضرة التاسعة عشر